

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2024**
Β' ΦΑΣΗ**E_3.Γλ1Α(α)****ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ****Ημερομηνία: Σάββατο 27 Απριλίου 2024**
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α****A1.** Σελίδα 68 σχολικού βιβλίου.

- A2**
- α)** Λάθος
 - β)** Λάθος
 - γ)** Σωστό
 - δ)** Σωστό
 - ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β**B1.** Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAM και OBM :

- OM (κοινή πλευρά)
- $OA = OB$ (υπόθεση)
- $\hat{AOM} = \hat{BOM}$ ($O\delta$ διχοτόμος)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

B2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και $BM\Delta$:

- $\hat{AM\Gamma} = \hat{BM\Delta}$ (ως κατακορυφήν γωνίες)
- $AM = BM$ (από το ερώτημα B1)
- $\hat{M\Gamma A} = \hat{M\Delta B}$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{O\hat{A}M}$ και $\hat{O\hat{B}M}$)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $A\Gamma = B\Delta$.

B3. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΟΜΓ$ και $ΟΜΔ$:

- $ΟΜ$ (κοινή πλευρά)
- $ΜΓ = ΜΔ$ (από το ερώτημα Β2)
- $ΟΓ = ΟΔ$ (ως άθροισμα ίσων πλευρών) $ΟΑ = ΟΒ$

$$\begin{array}{r} + \quad ΑΓ = ΒΔ \\ \hline ΟΓ = ΟΔ \end{array}$$

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

2^η λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΟΜΓ$ και $ΟΜΔ$:

- $ΟΜ$ (κοινή πλευρά)
- $\hat{ΓΟΜ} = \hat{ΔΟΜ}$ ($Οδ$ διχοτόμος)
- $ΟΓ = ΟΔ$ (ως άθροισμα ίσων πλευρών) $ΟΑ = ΟΒ$

$$\begin{array}{r} + \quad ΑΓ = ΒΔ \\ \hline ΟΓ = ΟΔ \end{array}$$

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

B4. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΟΑΔ$ και $ΟΒΓ$:

- $ΟΑ = ΟΒ$ (υπόθεση)
- $\hat{ΧΟΥ}$ (κοινή γωνία)
- $ΟΓ = ΟΔ$ (ως άθροισμα ίσων πλευρών) $ΟΑ = ΟΒ$

$$\begin{array}{r} + \quad ΑΓ = ΒΔ \\ \hline ΟΓ = ΟΔ \end{array}$$

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

2^η λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΟΑΔ$ και $ΟΒΓ$:

- $ΟΑ = ΟΒ$ (υπόθεση)
- $ΑΔ = ΒΓ$ (ως άθροισμα ίσων πλευρών $ΑΜ = ΒΜ$

$$\begin{array}{r} + \quad ΜΔ = ΜΓ \\ \hline ΑΔ = ΒΓ \end{array}$$

- $ΟΔ = ΟΓ$ (ως άθροισμα ίσων πλευρών $ΟΒ = ΟΑ$

$$\begin{array}{r} + \quad ΒΔ = ΑΓ \\ \hline ΟΔ = ΟΓ \end{array}$$

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το τρίγωνο $ΕΒΖ$ είναι ορθογώνιο και επειδή $\hat{Β} = 60^\circ$ έχουμε ότι

$$\hat{ΕΖΒ} = 30^\circ, \text{ άρα } BE = \frac{BZ}{2} = \frac{2BG}{2} = BG \Leftrightarrow BE = BG.$$

Επίσης το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε $ΑΔ = ΒΓ$.

$$\text{Άρα } \left. \begin{array}{l} BE = BG \\ AD = BG \end{array} \right\} \Leftrightarrow BE = AD.$$

Γ2. Το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, θα ισχύει $ΑΒ // ΔΓ$ οπότε $ΑΕ // ΔΓ$ συνεπώς το $ΑΕΓΔ$ είναι τραπέζιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΒΖ$ η $ΕΓ$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $ΕΓ = \frac{BZ}{2} = \frac{2BG}{2} = BG \Leftrightarrow ΕΓ = BG$, επίσης το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε θα ισχύει $ΑΔ = ΒΓ$.

$$\text{Το } \left. \begin{array}{l} ΕΓ = BG \\ AD = BG \end{array} \right\} \Leftrightarrow ΕΓ = AD \text{ συνεπώς το } ΑΕΓΔ \text{ είναι ισοσκελές τραπέζιο.}$$

Γ3. i) Στο τρίγωνο MBZ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \text{E μέσο MB} \\ \text{Γ μέσο BZ} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{EΓ} // \text{MZ} \text{ γιατί ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών.}$$

ii) Επίσης $\text{EΓ} = \frac{\text{MZ}}{2}$, από το προηγούμενο ερώτημα επειδή ενώνει τα μέσα

$$\text{δυο πλευρών, συνεπώς: } \text{EΓ} = \frac{\text{MZ}}{2} \Leftrightarrow \text{MZ} = 2\text{EΓ}$$

Όμως από το ερώτημα Γ2 έχουμε $\text{EΓ} = \text{AΔ}$ συνεπώς $\text{MZ} = 2\text{AΔ}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ συνεπώς $\text{AB} = \frac{\text{BΓ}}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{AΔ} \perp \text{BΓ} \\ \text{AΔ} // \text{Γχ} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{Γχ} \perp \text{BΓ} \text{ συνεπώς } \hat{\text{ZΓB}} = 90^\circ.$$

Επίσης στο τρίγωνο ZΓB επειδή $\hat{\text{B}} = 60^\circ$, έχουμε $\hat{\text{Z}} = 30^\circ$ οπότε

$$\text{BΓ} = \frac{\text{BZ}}{2}, \text{ άρα } \text{AB} = \frac{\text{BΓ}}{2} = \frac{\frac{\text{BZ}}{2}}{2} = \frac{\text{BZ}}{4}.$$

Δ2. Στο τρίγωνο ZΓB έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Κ μέσο ZΓ} \\ \text{Μ μέσο BΓ} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{KM} = \frac{\text{BZ}}{2} \text{ επειδή ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών.}$$

$$\text{Επίσης από το Δ1 ερώτημα έχουμε } \text{BΓ} = \frac{\text{BZ}}{2},$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{KM} = \frac{\text{BZ}}{2} \\ \text{BΓ} = \frac{\text{BZ}}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{KM} = \text{BΓ}.$$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ZΓA είναι ορθογώνιο με $\hat{\text{Z}} = 30^\circ$ άρα

$$\text{AΓ} = \frac{\text{ZΓ}}{2} = \frac{2\text{ΚΓ}}{2} = \text{ΚΓ} \Leftrightarrow \text{AΓ} = \text{ΚΓ}.$$

Δ3. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AM = MB$, επίσης στο ίδιο τρίγωνο

$\hat{\Gamma} = 30^\circ$ συνεπώς $AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AB = MB$ συνεπώς στο τρίγωνο AMB

ισχύει: $AM = MB = AB$ άρα είναι ισόπλευρο, οπότε η AD ως ύψος είναι και διάμεσος άρα $MD = DB$.

Δ4. Στο τρίγωνο $Z\Gamma B$ έχουμε:

$\left. \begin{array}{l} K \text{ μέσο } Z\Gamma \\ M \text{ μέσο } B\Gamma \end{array} \right\} \Leftrightarrow KM \parallel ZB$ επειδή ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών,

άρα και $ME \parallel AB$.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $M\Delta E$ και $A\Delta B$:

- $M\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}B = 90^\circ$
- $M\Delta = \Delta B$ (από Δ3 ερώτημα)
- $E\hat{M}\Delta = A\hat{B}\Delta$ (ως εντός εναλλάξ)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία)

τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $ME = AB$, οπότε στο τετράπλευρο $MEBA$

δύο πλευρές είναι ίσες και παράλληλες άρα είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα είναι ρόμβος.